

一. 試求下列各極限值：(每小題 6%，共 18%)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

二. 設 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x < 1; \\ 2, & x = 1; \\ x^2+b, & x > 1. \end{cases}$

(1) 試求 a, b 之值，使得 f 在 $x=1$ 為連續。 (10%)

(2) 是否存在 a, b 值，使得 f 在 $x=1$ 為可微分。 (10%)

三. 設 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 為連續函數，試證明：

(1) 存在 $p \in [0, 1]$ ，使得 $f(p) = p$ 。 (10%)

(2) 若 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{5}$ ，則方程式 $f(x) - \frac{1}{5} = 0$ 有實數根。 (10%)

四. 試求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $a=0$ 的泰勒級數(Taylor series)，並求其收斂

區間。 (18%)

五. 設 $f(x, y) = xe^{x+y}$ ，

(1) 試求 f 在點 $(0, 0)$ 的偏導數 $f_x(0, 0)$ 及 $f_y(0, 0)$ ； (8%)

(2) 試求曲面 $z = f(x, y)$ 在點 $(0, 0)$ 的切平面方程式； (3%)

(3) 試求 $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ 。 (8%)