中國文化大學 97 學年度轉學招生考試

系組：應用數學系三年級　　日期節次：7 月 29 日第 4 節

科目：高等微積分　(4-81)

一、在實數集 $\mathbb{R}$ 上，判斷下列各子集的最小上界 (supremum) 及最大下界 (infimum)。

(8%) (1) $S = \{ 2^{-a} + 3^{-b} + 7^{-c} \mid a, b, c$ 為正整數$\}$

(8%) (2) $S = \{ x \mid (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4) < 0 \}$

二、(1) 設 $v_k = (x_k, y_k)$，$k = 1, 2, 3, \cdots$ 為歐氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一組序列，而 $v = (x, y)$ 為 $\mathbb{R}^2$ 上一點。

(10%) 試證明：若 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ 且 $\lim_{k\to\infty} y_k = y$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} v_k = v$$

(2) 設 $v_k = \left(\frac{1}{k}\sin k,\ k^2 e^{-k}\right)$

(10%) 試求 $\lim_{k\to\infty} v_k = ?$

三、在平面 $\mathbb{R}^2$ 上判斷下列各集合是否為緊緻 (compact)？是否為連通 (connected)？並求其聚點 (accumulation point) 所成之集。

(10%) (1) $S = \{ (\frac{1}{k}, 2^{-k}) \mid k = 1, 2, \cdots \} \cup \{(0,1)\}$

(10%) (2) $S = \{ (x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2 \}$

四、設 $g_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $g_k(x) = \dfrac{\sin x}{2^k}$，$k = 1, 2, 3 \cdots$

(16%) 為函數序列 (sequence)，試證明：$\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ 在 $[0,1]$ 為均勻收斂 (uniform convergence)

五、設 $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 為遞增 (increasing) 函數，

(16%) 試證明：f 在 $[0,1]$ 為 Riemann 可積分。

六、設 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 定義為 $f(x,y) = (x^2 y,\ x\sin y,\ x e^{xy} + 1)$

(12%) 試求 f 在點 $(0,1)$ 的導數 (derivative)